2 ЕКІ ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

2.1 Тік бұрышты координаталар (мекендіктер) жүйесінде анықталған екі еселі интегралдар.

Oxy жазықтығының жабық D аймағында анықталған $f(x,y)$ функциясы берілсін. D аймағын кез келген жолмен n жай аймақтарға бөлейік. Осы жай (қарапайым) аймақтардың аудандарын $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ деп, ал сәйкес диаметрлерін $d_1, d_2, \ldots, d_n$ арқылы белгілейік, мұндағы аймақ диаметрі деп осы аймақта жататын кезкелеген екі нүктенің ара қашықтықтарының ең үлкенін айтады. Әрбір жай аймақтан кез келген бір $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ нүктеден таңдап алып, осы нүктелердегі анықталатын функциялардың мәндерін сәйкес ΔS_i, $i = 1, \ldots, n$ аудандарына көбейтіп қолдансақ:

$$f(x_1, y_1) \cdot \Delta S_1 + f(x_2, y_2) \cdot \Delta S_2 + \cdots + f(x_n, y_n) \cdot \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i .$$

Осы қосынды $f(x,y)$ функциясының D аймағындағы интегралдық қосындысы деп аталады.

Егер интегралдық қосындының $\max d_i \to 0$ шегі бар және ол шек D аймағын n жай аймақтарға қалай бөлгенімізге де, әрбір жай аймақтан M_i нүктелерін қалай алғанымызға да байланысты болмаса, онда осы шек $f(x,y)$ функциясының D аймағындағы *екі еселі интегралы* деп аталады да былай белгіленеді:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \tag{1}$$

Егер D аймағында $f(x,y) > 0$ болса, онда $\iint_D f(x,y)\,dS$ екі еселі интегралы жоғарыдан $z = f(x,y)$ бетімен, бүйір жағынан D аймағының шекарасы арқылы өтетін Oz осіне параллель болатын цилиндр бетімен, төменнен Oxy жазықтығымен шектелген цилиндрлік дененің көлеміне тең болады.

Екі еселі интегралдың негізгі қасиеттері:

1. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\,dS = \iint_D f_1(x,y)\,dS \pm \iint_D f_2(x,y)\,dS$.

2. $\iint\limits_D C\cdot f(x,y)dS = C\iint\limits_D f(x,y)dS$, мұндағы C – тұрақты сан.

3. Егер D аймағын D_1 және D_2 аймақтарына бөлсек, онда $\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dS$.

4. Егер D аймағында $f(x,y) \geq g(x,y)$ болса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dS \geq \iint\limits_D f(x,y)dS$.

5. Екі еселі интегралды бағалау.

Егер $m \leq f(x,y) \leq M$ болма, онда $m\cdot S \leq \iint\limits_D f(x,y)dS \leq M\cdot S$,

мұндағы S – D аймағының ауданы, ал m мен M сәйкесінше $f(x,y)$ функциясының осы аймақтағы ең кіші және ең үлкен мәндері.

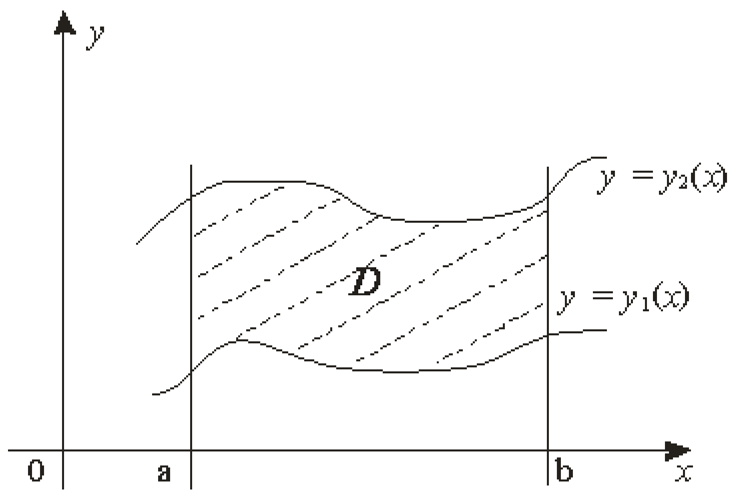
6. $f(x,y)$ функциясының D аймағындағы орта мәні туралы теорема.

Егер D аймағында $f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dS = f(\xi,\eta)\cdot S$ теңдігі орындалатындай осы аймақта жататын $P(\xi,\eta)$ нүктесі табылады.

Екі еселі интегралды есептеу

Интегралдау аймағы берілу пішіні (тұрпаты) бойынша екі түрге бөлінеді.

a) D аймағы $x=a$ мен $x=b$ $(a<b)$ түзулерімен $y=y_1(x)$ пен $y=y_2(x)$ ($x\in[a,b]$ жатқанда $y_1(x)\leq y_2(x)$) үзіліссіз қисық сызықтарымен шектелсін әрі Oy осіне (беліне) параллель (қатарлас) жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (2 - сурет).

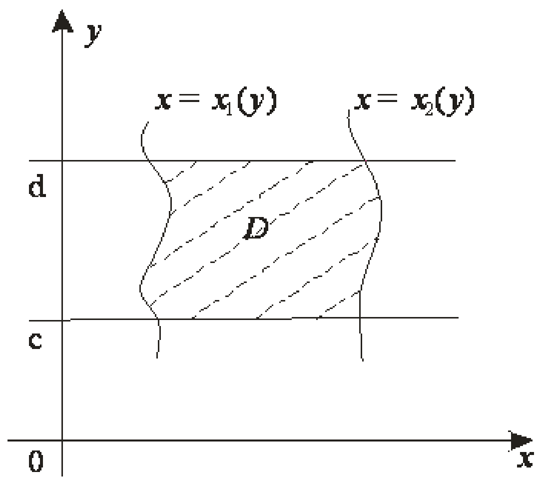


2 – сурет

Осындай аймақ үшін екі еселі интеграл формуласымен (кейіптемесімен) есептелінеді. Есептеу кезінде алдымен ішкі $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ интегралы есептелінеді әрі бұл жағдайда x айнымалысы тұрақты деп саналады.

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2)$$

б) D аймағы $y=c$ мен $y=d$ $(c<d)$ түзулерімен $x=x_1(y)$ пен $x=x_2(y)$ ($y\in[c,d]$ жатқанда $x_1(y)\le x_2(y)$) үзіліссіз қисық сызықтарымен шектелсін әрі Ox осіне (беліне) параллель (қатарлас) жүргізілген түзулер осы қисықтардың әрқайсысын тек бір нүктеде қисын (3 – сурет).



3-сурет

Осындай аймақ үшін екі еселі интеграл формуласымен (кейіптемесімен) есептелінеді. Есептеу кезінде алдымен ішкі $\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ интегралы есептелінеді әрі бұл жағдайда y айнымалысы тұрақты деп саналады.

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \qquad (3)$$

Берілген формулалардың оң жақтары қайталама интегралдар деп аталады.

1-мысал. $\iint\limits_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы тіктөртбұрыш: $-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 3$.

Шешуі. $\iint\limits_D \frac{y^3}{1+x^2}dxdy = \int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}\int\limits_0^3 y^3dy = \operatorname{arctg} x\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^3 = \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{81}{4} = \frac{81}{8}\pi$

2-мысал. $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы квадрат: $-2\le x\le 2,\ -2\le y\le 2$.

Шешуі. $\iint\limits_D (x+y)^2dxdy = \int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-2}^{2}(x+y)^2dy = \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2}(x+y)^3\Big|_{-2}^{2}dx = \frac{1}{3}\int\limits_{-2}^{2}\left[(x+2)^3-(x-2)^3\right]dx =$

$$= \frac{1}{12}\left[(x+2)^4-(x-2)^4\right]\Big|_{-2}^{2} = 42\frac{2}{3};$$

3-мысал. $\int\limits_1^3 dx\int\limits_{x^3}^{x}(x-y)dy$ интегралын есептеу керек.

Шешуі.

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_{x^3}^{x}(x-y)dy = \int\limits_1^3\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=x}dx = \int\limits_1^3\left(x^2-\frac{x^2}{2}-x^4+\frac{x^6}{2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{14}\right)\Bigg|_1^3 = 112\frac{8}{105}.$$

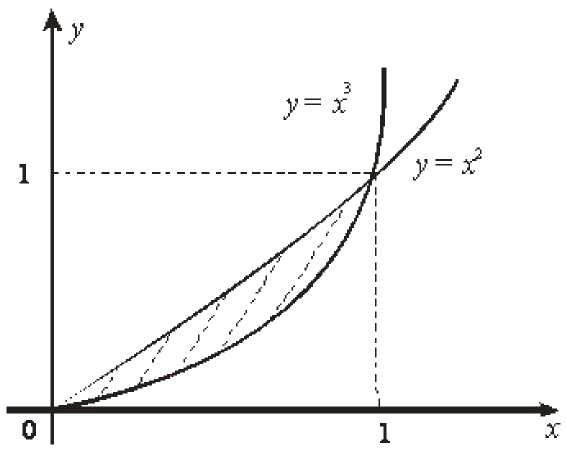
4-мысал. $\iint\limits_D (2-x-y)dxdy$ интегалын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=x^2,\ y=x^3\ (x\ge 0)$ параболаларымен шектелген.

Шешуі. D аймағын сызайық. $y=x^2$ және $y=x^3$ параболаларының қиылысу нүктелері $O(0,0)$ және $A(1,1)$ болады (4 - сурет).

$0\le x\le 1,\ x^3\le y\le x^2$ болғандықтан

$$\iint\limits_D (2-x-y)dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{x^2}(2-x-y)dy = \int\limits_0^1\left(2y-xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{y=x_2}dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left(2x^2-x^3-\frac{x^4}{2}-2x^3+x^4+\frac{x^6}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{14}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{37}{420}.$$



4-сурет

Енді осы интегралдың интегралдау ретін өзгертейік. Алдымен x бойынша одан кейін y бойынша интегралдайық.

$x_1 = \sqrt{y} \le x \le x_2 = \sqrt[3]{y}$, $0 \le y \le 1$ болғандықтан $\iint\limits_D (2 - x - y) dxdy =$

$$= \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} (2 - x - y) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[3]{y}} dy = \int_0^1 \left(2\sqrt[3]{y} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{y^4} - \right.$$

$$\left. - 2\sqrt{y} + \frac{1}{2} y + \sqrt{y^3} \right) dy = \left(\frac{3}{2} y^{4/3} - \frac{3}{10} y^{5/3} - \frac{3}{7} y^{7/3} - \frac{4}{3} y^{3/2} + \frac{1}{4} y^2 + \frac{2}{5} y^{5/2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{37}{420}.$$

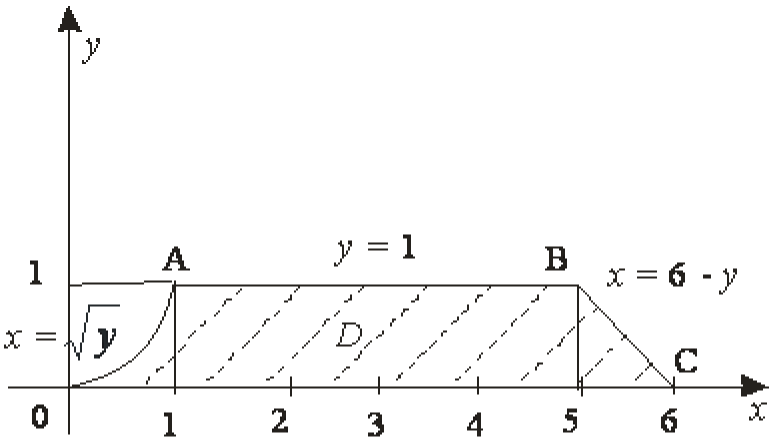
5-мысал. $\iint\limits_D (x^2 + y^2) dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y = x^2$ параболасымен $y = 6 - x, y = 1, y = 0$ түзулерімен шектелген.

Шешуі. D аймағын құрайық (5-сурет).

Қиылысу нүктелері $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(5,1)$, $C(6,0)$ болады. Алдымен x бойынша, одан кейін y бойынша интегралдайық. $0 \le y \le 1$, $\sqrt{y} \le x \le 6 - y$ болғандықтан

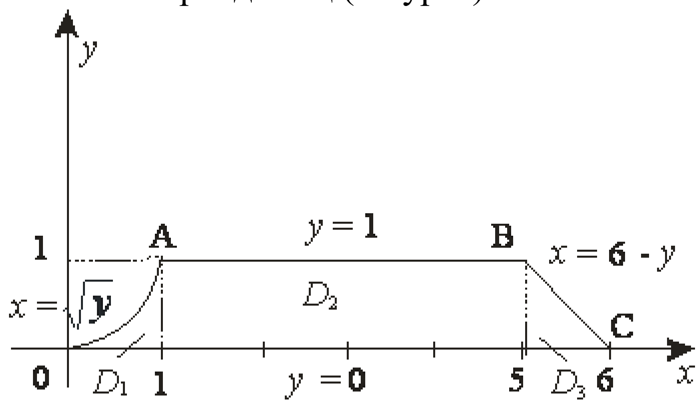
$$\iint\limits_D (x^2 + y^2) dS = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{6-y} (x^2 + y^2) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} x^3 + xy^2 \right) \Bigg|_{x=\sqrt{y}}^{x=6-y} dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} (6 - y)^3 + \right.$$

$$\left. + (6 - y) y - \frac{1}{3}\sqrt{y^3} - y^2\sqrt{y} \right] dy = \left(\frac{-(y-6)^4}{12} + 2y^3 - \frac{y^4}{4} - \frac{2}{15} y^{5/2} - \frac{2}{7} y^{7/2} \right) \Bigg|_0^1 = 57\frac{26}{105}.$$



5-сурет

Енді интегралдау ретін өгертейік. Алдымен y бойынша, содан кейін x бойынша интегралдайық (6-сурет).



6-сурет

Бұл жағдайда D облысы үш D_1, D_2, D_3 облыстарына бөлінеді:

$$D_1: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le x^2,$$
$$D_2: \quad 1 \le x \le 5, \quad 0 \le y \le 1,$$
$$D_3: \quad 5 \le x \le 6, \quad 0 \le y \le 6 - x$$

$$\iint_D (x^2+y^2)dS = \iint_{D_1} (x^2+y^2)dS + \iint_{D_2} (x^2+y^2)dS + \iint_{D_3} (x^2+y^2)dS,$$

$$\iint_{D_1} (x^2+y^2)dS = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2+y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{26}{105};$$

$$\iint_{D_2} (x^2+y^2)dS = \int_1^5 dx \int_0^1 (x^2+y^2)dy = \int_1^5 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \right)\Bigg|_1^5 = 42\frac{2}{3};$$

$$\iint_{D_1}\left(x^2+y^2\right)dS=\int_5^6 dx\int_0^{6-x}\left(x^2+y^2\right)dy=\int_5^6\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=6-x}dx=\int_5^6\Big[x^2(6-x)+$$

$$+\frac{(6-x)^3}{3}\Big]dx=\int_5^6\left[6x^2-x^4-\frac{(x-6)^3}{3}\right]dx=\left(2x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{(x-6)^4}{12}\right)\Bigg|_5^6=14\frac{1}{3}.$$

Сонымен $$\iint_D\left(x^2+y^2\right)dS=\frac{26}{105}+42\frac{2}{3}+14\frac{1}{3}=57\frac{26}{105}.$$

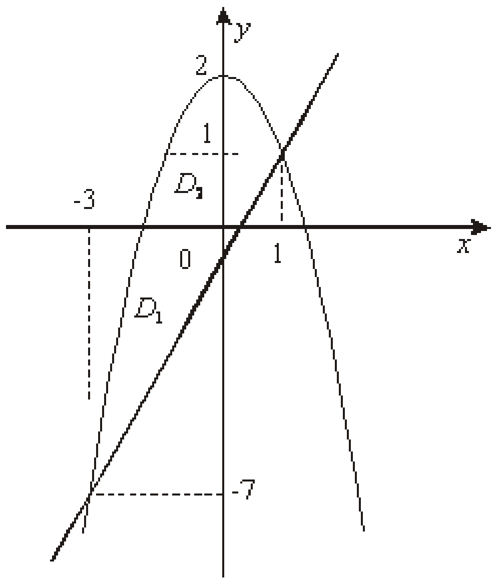
6-мысал. $f(x,y)=xy^2$ функциясының D аймағындағы орта мәнін табу керек, мұндағы D аймағы: $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1$.

Шешуі. $S=2$,

$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{S}\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\iint_D xy^2dxdy=\frac{1}{2}\int_0^2 xdx\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}.$$

7-мысал. $\int_{-3}^{1}dx\int_{2x-1}^{2-x^2}f(x,y)dy$ интегралының интегралдау ретін өзгерту керек.

Шешуі. D аймағы $x=-3,\ x=1,\ \ y=2x-1,\ y=2-x^2$ сызықтарымен шектелеген. Интегралдау ретін өзгерту үшін D аймағын $y=1$ түзуімен D_1 және D_2 аймақтарына бөлеміз (7-сурет):



6-сурет

D_1 аймағы сол жағынан $x=-\sqrt{2-y}$ параболасымен, ал оң жағынан $x=\frac{1}{2}(y+1)$ түзуімен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y}\le x\le\frac{1}{2}(y+1)$, $-7\le y\le 1$.

D_2 аймағы оң және сол жағынан $x=\pm\sqrt{2-y}$ параболасымен шектелген, яғни $-\sqrt{2-y}\le x\le\sqrt{2-y},\ 1\le y\le 2$.

Сонымен $\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}f(x,y)\,dy=\int\limits_{-7}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)\,dx+\int\limits_{1}^{2}dy\int\limits_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}}f(x,y)\,dx$

1. $\iint\limits_D x\ln y\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0\le x\le 4, 1\le y\le e$.

2. $\iint\limits_D x^2\sin y\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $2\le x\le 5,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}$.

3. $\iint\limits_D (1+y)\sqrt{x}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $0\le x\le 4, -1\le y\le 2$.

4. $\iint\limits_D \left(x+3\sqrt{y}\right)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1\le x\le 2, 1\le y\le 4$.

5. $\iint\limits_D (x+2y)^2\,x\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D тіктөртбұрыш: $1\le x\le 3, -1\le y\le 2$.

6. $\iint\limits_D \left(\cos^2 x+\sin^2 y\right)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $0\le x\le\frac{\pi}{4},\ 0\le y\le\frac{\pi}{4}$.

7. $\iint\limits_D \left(x+xy^2+5\right)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D квадрат: $-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$.

8. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{x^2}(x+y)\,dy$ интегралын есептеу керек.

9. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y^4\,dy$ интегралын есептеу керек.

10. $\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{3\cos x} y\sin x\,dy$ интегралын есептеу керек.

11. $\iint_D (x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=2-x^2,\ y=2x-1$ сызықтарымен шектелген.

12. $\iint_D (x^2+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=x^2$ және $y^2=x$ параболаларымен шектелген.

13. $\iint_D \sin(x+y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=0,\ y=x,\ y=\frac{\pi}{2}-x$ түзулерімен шектелген.

14. $\iint_D (x-2xy+3y^2)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=0,\ y=x^2,\ x=2$ сызықтарымен шектелген.

15. $\iint_D (x+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $x=0,\ y=x^2,\ y=9$ сызықтарымен шектелген.

16. $\iint_D (x^2+2y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=3-x^2,\ y=2x$ сызықтарымен шектелген.

17. $\iint_D (2x-y)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y^2=x,\ x+y=2$ сызықтарымен шектелген.

Екі еселі интегралдардың интегралдау реттерін өзгерту керек:

18. $\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

19. $\int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$

20. $\int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x,y)dy$

21. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

22. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)dy$

23. $\int_0^2 dx \int_{x^2}^{x^2+2} f(x,y)dy$

24. $\int_0^1 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x,y)dy$

25. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$

2.2 Екі еселі интегралдағы айнымалыларды алмастыру

Екі еселі интегралда x, y координатасынан, $x = x(u,v), y = y(u,v)$ формуласының көмегімен, u, v координатасына көшу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{D'} F(u,v) \cdot |I| dudv \tag{4}$$

формуласымен жүзеге асады, мұндағы $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$;

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ – якобиян,}$$

ал $x = x(u,v), y = y(u,v)$ өзара бірмәнді, D аймағында үзіліссіз әрі осы аймақта үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар функциялар.

2.3 Полярлық координаталар жүйесінде анықталған екі еселі интегралдар

Екі еселі интегралдарда тік бұрышты x, y координаталарынан, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\boldsymbol{\varphi}$ формулаларының көмегімен, $r, \boldsymbol{\varphi}$ *полярлық координаталарына* көшу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot |I| \, dr d\varphi \tag{5}$$

формуласымен жүзеге асады. Мұндағы

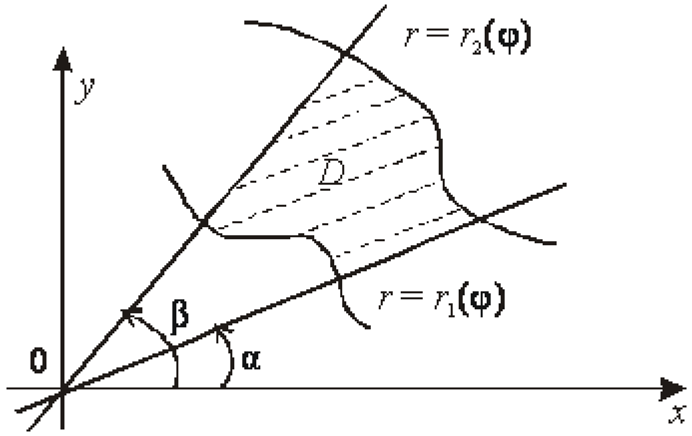
$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

болады.

Егер интегралдау D аймағы $\boldsymbol{\varphi = \alpha}$ және $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ сәулелерімен, $r = r_1(\varphi)$ және $r_2 = r(\varphi)$ ($\varphi \in [\alpha, \beta]$ жатқанда $r_2(\varphi) \ge r_1(\varphi)$ болса) қисық сызықтарымен шектелсе, онда екі еселі интеграл

$$\iint_D F(r,\varphi) \cdot r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) \cdot r \, dr$$

формуласымен есептелінеді (8-сурет).



8-сурет

Егер екі еселі интегралдағы айнымалыларды алмастыру

$$x = a\cdot\rho\cos^k\varphi,\quad y = b\cdot\rho\sin^k\varphi$$

формулаларының көмегімен жасалса, онда мұндағы ρ мен $\boldsymbol{\varphi}$ *жалпы полярлық координаталар* деп аталады да якобиян $I = ab\cdot\rho\cdot k\sin^{k-1}\varphi\cdot\cos^{k-1}\varphi$.

8-мысал. Полярлық координаталар жүйесіне көшу арқылы $\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $x^2 + y^2 = ax$ шеңберімен шектелген $(a > 0)$.

Шешуі. D аймағы радиусы $\frac{a}{2}$ тең, центрі $O\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ болатын дөңгелек болғандықтан полярлық координаталарға көшеміз. $x^2 + y^2 = ax$ шеңбері полярлық координаталар жүйесінде $r = a\cdot\boldsymbol{\cos\varphi}$ формуласы арқылы анықталады. $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a\cos\varphi$ болғандықтан (5) – формуланы қолдансақ

$$\iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - r^2}\cdot r\,d\varphi dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\cdot\frac{d\left(a^2 - r^2\right)}{-2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(a^3\sin^3\varphi - a^3\right)d\varphi = -\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi - \varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi a^3,$$

9-мысал. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}$, $x^2 + y^2 = \pi^2$ шеңберлерімен шектелген.

Шешуі. D аймағы радиустары $\frac{\pi}{3}$-ке және $\boldsymbol{\pi}$-ге тең, ал центрлері координаталар жүйесінің бас нүктесі болатын екі шеңбердің арасындағы сақина болғандықтан полярлық координаталарға көшеміз. Бұл шеңберлер полярлық координаталар жүйесінде $r=\frac{\pi}{3}$ және $r=\pi$ формулалры арқылы анықталады. Сондықтан $0\le\varphi\le 2\pi,\ \frac{\pi}{3}\le r\le\pi$ болғандықтан, (5)-формуланы қолдансақ

$$\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D \sin r\ dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\sin r\,dr=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot(-\cos r)\Big|_{\pi/3}^{\pi}=3\pi.$$

10-мысал. $\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсімен шектелген.

Шешуі. $x=a\cdot\rho\cos\theta,\ \ y=b\cdot\rho\sin\theta$ деп алсақ, онда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллипсінің полярлық координаталар жүйесіндегі теңдеуі $\rho=1$. Якобиян $I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=ab\cdot\rho$, ал $0\le\rho\le1,\ 0\le\varphi\le2\pi$ болғандықтан

$$\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy=ab\iint\limits_D\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\,d\rho d\theta=ab\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}d\rho=$$

$$=-\frac{ab}{3}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta=\frac{ab}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi ab}{3}.$$

11-мысал. $\iint\limits_D(y+ax)(y-bx)dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y=-ax+C_1,\ y=-ax+C_2,\ y=bx+C_3,\ y=bx+C_4\ \ (C_1<C_2,\ C_3<C_4,\ a>0,\ b>0)$ түзулерімен шектелген.

Шешуі. $y+ax=u,\ y-bx=v$ немесе $x=\frac{u-v}{a+b},\ y=\frac{av+bu}{a+b}$ деп алсақ, онда $C_1\le u\le C_2,\ C_3\le v\le C_4$, ал якобиян

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b}\\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\end{vmatrix}=\frac{1}{a+b}$$

болады. Сонымен

$$\iint\limits_D(y+ax)(y-bx)dxdy=\iint\limits_D u\cdot v\cdot\left|\frac{1}{a+b}\right|du\,dv=\frac{1}{|a+b|}\int\limits_{C_1}^{C_2}u\,du\int\limits_{C_3}^{C_4}v\,dv=\frac{\left(C_2^2-C_1^2\right)\left(C_4^2-C_3^2\right)}{4|a+b|}.$$

Полярлық координаталарға көшу арқылы келесі екі еселі интегралдарды есептеу керек:

26. $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$, мұндағы D аймағы $x^2 + y^2 = 2ax$ шеңберімен шектелген.

27. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, мұндағы D аймағы $x^2 + y^2 \le a^2$ дөңгелегінің бірінші ширегі.

28. $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}dxdy$, мұндағы D аймағы $x^2 + y^2 = 1$ және $x^2 + y^2 = e^2$ шеңберлерімен шектелген.

29. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 + a^2}$, мұндағы D аймағы $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ жарты шеңберімен, OX осімен шектелген $(y \ge 0)$.

30. $\iint\limits_D x^2 y dxdy$ интегралын есептеу керек, мұндағы D аймағы $y = ax$ пен $y = bx$ $(0 < a < b)$ және $yx = p$ мен $xy = q$ $(0 < p < q)$ гиперболасымен шектелген.

Ескерту. $\frac{y}{x} = u,\ xy = v$.

2.4 Жазық фигуралардың (пішіндердің) аудандарын есептеу

D аймағымен шектелген жазық фигураның ауданы

$$S = \iint\limits_D dxdy \qquad (6)$$

формуласымен анықталады.

Егер D аймағы $a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)$ теңсіздіктерімен шектелсе, онда

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

Егер D аймағы полярлық координаталар жүйесінде $\alpha \le \varphi \le \beta$, $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$ теңсіздіктерімен шектелсе, онда

$$S = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr.$$

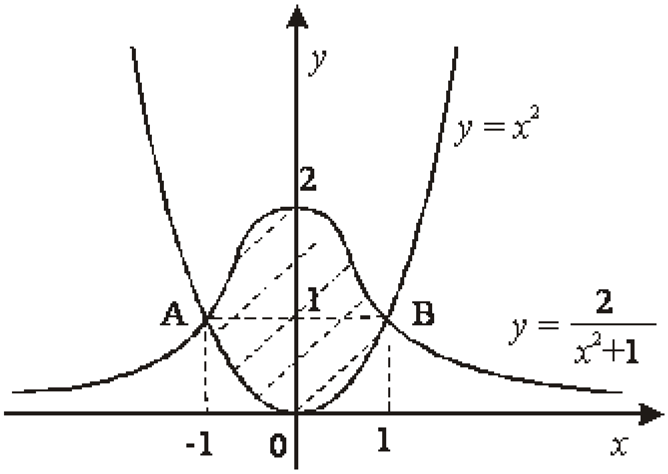
12-мысал. $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ және $y=x^2$ сызықтарымен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек.

Шешуі**.** Берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін табамыз:

$$\frac{2}{x^2+1}=x^2, \quad x=\pm 1$$

олар $A(-1,1)$ және $B(1,1)$ нүктелері (9-сурет). Сонымен $-1\le x\le 1$, $x^2\le y\le \dfrac{2}{x^2+1}$ болғандықтан

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{\frac{2}{x^2+1}}dy=\int\limits_{-1}^{1}y\Bigg|_{y=x^2}^{y=\frac{2}{x^2+1}}dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1}-x^2\right)dx=2\,\mathrm{arctg}\,x\Bigg|_{-1}^{1}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}=\pi-\frac{2}{3}.$$



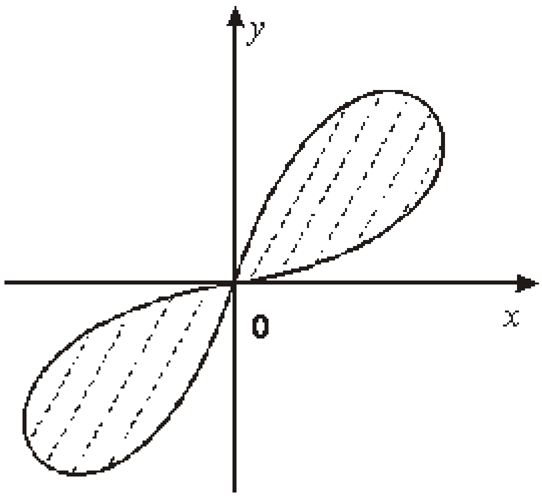
9-сурет

13-мысал. Полярлық координаталар жүйесіне көшу арқылы $\left(x^2+y^2\right)^3=2a^2xy^3$ қисық сызығымен шектелген жазық фигураның ауданын табу керек $(a>0)$.

Шешуі**.** $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$ формулалары арқылы полярлық координаталар жүйесіне көшсек $r^6=2a^2r^4\sin^3\varphi\cos\varphi$ немесе

$r=a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}=a\left|\sin\varphi\right|\cdot\sqrt{\sin 2\varphi}$, мұндағы $\sin 2\varphi\ge 0$

болғандықтан $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Яғни $\boldsymbol{\varphi}$ 0-ден $\dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$-ке дейін өзгергендегі фигураның ауданы берілген фигураның ауданының жартысына тең болады (10-сурет).



10- сурет

Сонымен

$$S = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} r\cdot dr = \int_0^{\pi/2} r^2 \Bigg|_0^{a\sqrt{2\sin^3\varphi\cos\varphi}} d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2}a^2\sin^4\varphi\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{2}.$$

Берілген сызықтармен шектелген жазық фигуралардың аудандарын табу керек:

31. $x = 4y - y^2, \quad x + y = 6$.
32. $x = y^2, \quad y = x^2$.
33. $y^2 = 10x + 25, \quad y^2 = 9 - 6x$.
34. $y^2 = 4ax, \ x + y = 3a, \quad y \geq 0 \quad (a > 0)$
35. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).
36. $r = a(1 + \cos\varphi), \quad r = a\cos\varphi \quad (a > 0)$.
37. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.
38. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + 4y^2)$.
39. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
40. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(3x^2 - y^2)$.

2.5 Денелердің көлемдерін есептеу

Жоғарыдан $z = f(x, y)$ бетімен, төменнен $z = 0$ жазықтығымен, бүйір жағынан D облысының шекарасы арқылы өтетін OZ осіне параллель болатын цилиндр бетімен шектелеген дененің көлемі

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy \tag{7}$$

формуласымен есептеледі.

14-мысал. $z=\frac{1}{3}y^2$ бетімен, $z=0$, $5x-2y-5=0$, $5x+3y-30=0$ жазықтықтарымен шектелген дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Берілген дене жоғарыдан $z=\frac{1}{3}y^2$ бетімен, төменнен $z=0$ жазықтығымен, ал бүйір жағынан $5x-2y-5=0$ және $5x+3y-30=0$ жазықтықтармен шектелген (11-сурет).